แผนการจัดการเรียนรู้

# รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

# หน่วยการเรียนรู้ การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

# เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน เวลา 1 ชั่วโมง

**ผลการเรียนรู้**

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

# สาระสำคัญ

**บทนิยาม 1**

จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) คือ คู่อันดับ เมื่อ และ เป็นจำนวนจริง

และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน และ

1. การเท่ากัน

ก็ต่อเมื่อ และ

1. การบวก

1. การคูณ

**บทนิยาม 2**

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน หรือ เมื่อ และ เป็นจำนวนจริง

เรียก ว่า ส่วนจริง (real part) ของ และเขียนแทนด้วย

เรียก ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ และเขียนแทนด้วย

# จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนได้

สาระการเรียนรู้

การกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูป เมื่อ และ เป็นจำนวนจริง ทำให้การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ง่าย โดยใช้สมบัติต่างๆ เกี่ยวกับการบวกและการคูณเช่นเดียวกับสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง โดยที่ เช่น

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องการบวก ลบ คูณและหารจำนวนเชิงซ้อน โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้

- การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน มีนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร

- ให้นักเรียนยกตัวอย่างการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

- นักเรียนและครูสรุปนิยาม การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

ซึ่งจะได้ว่า

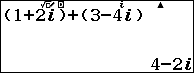
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

3. เตรียมการให้ความรู้ในการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อเรียนรู้เรื่องสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน โดยให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม จำนวน 5 กลุ่ม โดยทุกคนเตรียมเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อน และหาค่าอื่นๆ ในจำนวนเชิงซ้อน โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้



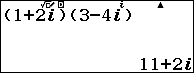
3.1 กดปุ่ม w

3.2 กดปุ่ม2 เพื่อเลือกเมนู Complex

3.3 หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม (1+2b)+

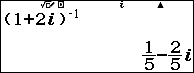
(3p4b)=



3.4 หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม (1+2b)

(3p4b)=



3.5 หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม (1+2b)u=

4. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อน และหาค่าอื่นๆ ในจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้การแทนค่าด้วยตัวแปร โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้



4.1 กดปุ่ม w



4.2 กดปุ่ม2

 4.3 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม 1+2b

4.4 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม Jz

4.5 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม 3p4b

 4.6 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน

โดยกดปุ่ม Jx

4.7 นำค่าจำนวนเชิงซ้อน มาบวกกับ

จำนวนเชิงซ้อน โดยกดปุ่ม

Qz+Qx=

****

4.8 นำค่าจำนวนเชิงซ้อน มาคูณกับ

จำนวนเชิงซ้อน โดยกดปุ่ม

QzQx=



4.9 หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

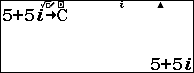
โดยกดปุ่ม Qzu=



4.10 หาผลคูณของ โดยใช้คำตอบจากข้อที่แล้ว

กดปุ่ม MQz=

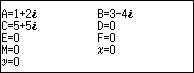
(ปุ่ม M จะเรียกค่าคำตอบ ที่หาเป็นลำดับสุดท้ายเสมอ)

4.11 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน และแทนด้วยค่า   
 โดยกดปุ่ม5+5bJu

 4.12 หาค่า

โดยกดปุ่ม Qz(Qx

+Qu)=



4.13 ดูค่าที่เก็บไว้ในตัวแปรทั้งหมด

โดยกดปุ่มqJ

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเก็บค่าตัวแปร D, E, F, M, x และ y ด้วยจำนวนเชิงซ้อนอะไรก็ได้ แล้วตรวจสอบค่าตัวแปรทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาค่า D+E, E+F, F+M, x+y แล้วให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่าค่าที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่ (เป็นจำนวนเชิงซ้อนเสมอ) แล้วให้นักเรียนลองหาค่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่ผลบวกไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่ (ไม่มี)

7. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจ)

8. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอใบกิจกรรมที่ได้รับและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน (ขั้นหาความสัมพันธ์)

9. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติปิดการบวกของจำนวนเชิงซ้อน)

10. ครูให้นักเรียนหาค่า D×E, E×F, F×M, x×y แล้วให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่าค่าที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่ (เป็นจำนวนเชิงซ้อนเสมอ) แล้วให้นักเรียนลองหาค่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่ผลคูณไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่ (ไม่มี)

11. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติปิดการคูณของจำนวนเชิงซ้อน)

12. ครูให้นักเรียนหาค่า D+0, E+0, F+0, M+0 , x+0 และ y+0 แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับค่าเดิมเสมอ)

13. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นเอกลักษณ์การบวก (ซึ่งจะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก)

14. ครูให้นักเรียนหาค่า D×1, E×1, F×1, M×1 , x×1 และ y×1 แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับค่าเดิมเสมอ)

15. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นเอกลักษณ์การคูณ (ซึ่งจะได้ว่า 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ)

16. ครูให้นักเรียนหาค่า (–D)+D, (-E)+E, (-F)+F, (-M)+M, (-x)+x และ (-y)+y แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับ 0 ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การบวกเสมอ)

17. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นตัวผกผันการบวกของ Z (ซึ่งจะได้ว่า -Z เป็นตัวผกผันการบวกของ Z เสมอ) และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทดลองหาจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่มีตัวผกผันการบวกว่ามีหรือไม่ (ไม่มี เพราะสามารถหาตัวผกผันการบวกได้ทุกจำนวน)

18. ครูให้นักเรียนหาค่า (D-1)D, (E-1)E, (F-1)F, (M-1)M, (x-1)x และ (y-1)y แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับ 1 ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การคูณเสมอ)

19. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นตัวผกผันการคูณของ Z (ซึ่งจะได้ว่า Z-1 เป็นตัวผกผันการบวกของ Z เสมอ) และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทดลองหาจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่มีตัวผกผันการคูณว่ามีหรือไม่ (มี คือ 0 ดังนั้นจึงมีข้อยกเว้นสำหรับ 0)

20. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่ได้จากการสำรวจ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์) จะได้ว่า

ถ้าให้ Z, Z1 , Z2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| สมบัติ | การบวก | การคูณ |
| สมบัติปิด | Z1 + Z2 ∈ C | Z1Z2 ∈ C |
| สมบัติการมีเอกลักษณ์ | Z + 0 = Z = 0 + Z | Z · 1 = Z = 1 · Z |
| สมบัติการมีตัวผกผัน | Z+(-Z) = 0 = (-Z)+Z | ZZ-1 = 1 = Z-1Z |

ถ้าให้ Z, Z1 , Z2 และ Z3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| สมบัติ | การบวก | การคูณ |
| สมบัติการสลับที่ | Z1 + Z2 = Z2 + Z1 | Z1Z2 = Z2Z1 |
| สมบัติการเปลี่ยนหมู่ | (Z1+Z2)+Z3 = Z1+(Z2+Z3) | (Z1Z2)Z3 = Z1(Z2Z3) |
| สมบัติการแจกแจง | Z1(Z2+Z3) = Z1Z2+ Z1Z3 | |

ถ้า Z, Z1 , Z2 และ Z3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่า

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| สมบัติ | การบวก | การคูณ |
| สมบัติปิด | Z1 + Z2 ∈ C | Z1Z2 ∈ C |
| สมบัติการมีเอกลักษณ์ | Z + 0 = Z = 0 + Z | Z · 1 = Z = 1 · Z |
| สมบัติการมีตัวผกผัน | Z+(-Z) = 0 = (-Z)+Z | ZZ-1 = 1 = Z-1Z |
| สมบัติการสลับที่ | Z1 + Z2 = Z2 + Z1 | Z1Z2 = Z2Z1 |
| สมบัติการเปลี่ยนหมู่ | (Z1+Z2)+Z3 = Z1+(Z2+Z3) | (Z1Z2)Z3 = Z1(Z2Z3) |
| สมบัติการแจกแจง | Z1(Z2+Z3) = Z1Z2+ Z1Z3 | |

21. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนตามหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันสมบัติต่างๆ ว่าเป็นจริงทุกกรณี อีกครั้งหนึ่ง

22. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน  
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1

2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1  
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

|  |  |
| --- | --- |
| **ใบกิจกรรมที่ 1** | **หน้าที่ 1/2** |
| เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน | |
| **จุดประสงค์** สามารถบอกสมบัติการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อนได้ | |
| **คำชี้แจง** ให้นักเรียน ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้ | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **ข้อ** | **กรณีที่ 1** | **กรณีที่ 2** |
| **1** |  |  |
| **2** |  |  |
| **3** |  |  |
| **4** |  |  |
| **5** |  |  |
| จาก ข้อ 1 – 5 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า เป็นจำนวนจริง และ Z1, Z2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน  จะได้  ดังนั้น Z1 + Z2 = ……. + …........  เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า ....................................................................................... | | |
| **6** |  |  |
| **7** |  |  |
| **8** |  |  |
| **9** |  |  |
| **10** |  |  |
| จาก ข้อ 6–10 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า เป็นจำนวนจริง และ Z1 , Z2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน  จะได้  ดังนั้น Z1Z2 = ……...…........  เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า ...................................................................................... | | |
| 11 |  |  |
| 12 |  |  |
| 13 | = |  |
| 14 |  |  |
| 15 |  |  |
| จากข้อ 11–15 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า เป็นจำนวนจริง และ Z1, Z2, Z3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน  จะได้ว่า  ดังนั้น = ……...…........  เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า ....................................................................................... | | |

|  |  |
| --- | --- |
| **ใบกิจกรรมที่ 1.1** | **หน้าที่ 2/2** |
| เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน | |
| **จุดประสงค์** สามารถบอกสมบัติการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อนได้ | |
| **คำชี้แจง** ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้ | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **16** |  |  |
| **17** |  |  |
| **18** |  |  |
| **19** |  |  |
| **20** |  |  |
| จากข้อ 16–20 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า เป็นจำนวนจริง และ Z1, Z2, Z3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน  จะได้ว่า  ดังนั้น (Z1 Z2) Z3 = ……...…........  เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า ....................................................................................... | | |
| **21** |  |  |
| **22** |  |  |
| **23** |  |  |
| **24** |  |  |
| **25** |  |  |
| จาก ข้อ 21–25 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า เป็นจำนวนจริง และ Z1 , Z2 , Z3  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า    ดังนั้น Z1 (Z2+ Z3) = ……. .. …............................................................  เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า ....................................................................................... | | |

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่องสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ถ้า Z, Z1, Z2 และ Z3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนบอกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาตร์

1. 0 + Z = Z ............................................................................................

2. Z · 1 = Z ...........................................................................................

3. Z1Z2 = Z2Z1  ............................................................................................

4. (Z1+Z2)+Z3 = Z1+(Z2+Z3) ............................................................................................

5. Z1 + Z2 ∈ C ............................................................................................

6. Z1(Z2+Z3) = Z1Z2+ Z1Z3 ............................................................................................

7. Z1 + Z2 = Z2 + Z1  ...........................................................................................

8. ZZ-1 = 1 ...........................................................................................

9. Z+(-Z) = 0 ...........................................................................................

10. Z1Z2 ∈ C ...........................................................................................

11. Z-1 Z = 1 ...........................................................................................

12. 1 · Z = Z ...........................................................................................

13. (-Z)+Z = 0 ...........................................................................................

14. Z + 0 = Z ...........................................................................................

15. (Z1Z2)Z3 = Z1(Z2Z3) ...........................................................................................